

数学（初級、中級）入学前講義

1章 因数分解

- 1・1 タスキガケ
- 1・2 余りの定理と因数分解
- 1・3 高次方程式を解く
- 1・4 2次関数のグラフとエックス軸の共有点の個数

2章 複素数の計算

- 2・1 複素数とは？
- 2・2 複素数の相当

3章 三角関数

- 3・1 三角比
- 3・2 鈍角のサイン・コサイン・タンジェント
- 3・3 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\tan A = \sin A / \cos A$

4章 数列

- 4・1 等差数列の一般項
- 4・2 等差数列の和
- 4・3 等比数列の一般項
- 4・4 等比数列の和
- 4・5 Σ の計算

5章 指数関数と対数

- 5・1 指数法則
- 5・2 対数とはどんな数？
- 5・3 対数の性質
- 5・4 対数の総合計算

6章 微分と積分

- 6・1 微分するとは
- 6・2 微分の公式
- 6・3 不定積分の公式
- 6・4 定積分の計算

1章 因数分解

1・1 タスキガケ

例. $6x^2 + 7x - 5$

$$6x^2 + 7x - 5 = (\bigcirc x + \Delta) (\square x + \diamond)$$

$$\bigcirc \times \square = 6 \quad \Delta \times \diamond = -5$$

$\bigcirc \times \square = 6$ より \bigcirc と \square の候補として

$$(\bigcirc, \square) = (1, 6), (2, 3), (-1, -6), (-2, -3)$$

$\Delta \times \diamond = -5$ より Δ と \diamond の候補として

$$(\Delta, \diamond) = (-1, 5), (5, -1), (1, -5), (-5, 1)$$

これらの候補を順次下図に入れて $\square \times \Delta$ を (ア) に、 $\bigcirc \times \diamond$ を (イ) に、これらを足した値を (ウ) に書き入れ、それが 7 になれば正解です。

$$\begin{array}{r} \bigcirc x \quad \Delta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square x \quad \diamond \end{array} \begin{array}{l} = \text{ (ア)} \\ = \text{ (イ)} \end{array}$$

+

→ (ウ)

$$6x^2 + \textcircled{7}x - 5$$

以上のような手順で $\bigcirc = 3$, $\Delta = 5$, $\square = 2$, $\diamond = -1$

$$\text{よって, } 6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1) //$$

と因数分解できます。

1・2 余りの定理と因数分解

$f(1) = 2$ のとき $f(x)$ を $(x-1)$ で割った余りが 2 ですから、割られる数 = 割る数 \times 商 + 余りの関係から

$$f(x) = (x-1) \times \text{商} + 2$$

$f(1) = 0$ のとき $f(x)$ を $(x-1)$ で割った余りが 0 ですから、割られる数 = 割る数 \times 商 + 余りの関係から

$$f(x) = (x-1) \times \text{商} + 0$$

よって、 $f(x)$ が $(x-1) \times \text{商}$ と因数分解できます。ここで用いた $f(x)$ は、中学で用いた y と同じで、 x の関数 (x で作られた式) であることを示す書き方です。

例 $2x^2 + 3x - 5$ を因数分解して下さい。

$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ とおきます。

$$f(1) = 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$$

$f(x)$ を $(x-1)$ で割ります。

$$\begin{array}{r} 2x + 5 \\ x-1 \overline{) 2x^2 + 3x - 5} \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ 5x - 5 \\ \underline{5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

もちろんタスキガケでも因数分解できます。

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5 = (x-1)(2x+5) + 0$$

答. $2x^2 + 3x - 5 = (x-1)(2x+5) //$ ←

1・3 高次方程式を解く

ここでは3次方程式の解き方を取りあげます。

3次方程式とは $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)

です。

例. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ の解法の流れ、

手順1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ とおきます。

手順2. $f(x) = 0$ となる x を探します。この x は、多くの場合 -6 の約数である。

(1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6) を順次チェックします。

$$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

手順3. 割り算をして、因数分解します。

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

手順4. 解を求めます。

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \text{ より}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$x-1=0 \text{ か } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$x=1 \quad \text{2次方程式なので、因数分解または解の公式で解けます。}$$

ただし、

$$x^2 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)$$

と因数分解してもよい。 $x=1$ か $x=2$ か $x=3$

1・4 2次関数のグラフとx軸の共有点の個数

2次関数のグラフと読むとき、グラフとx軸との共有点の個数により、3つの場合に分かれます。ここでは、この3つの場合のどれになるかをチェックする方法を取りあげます。

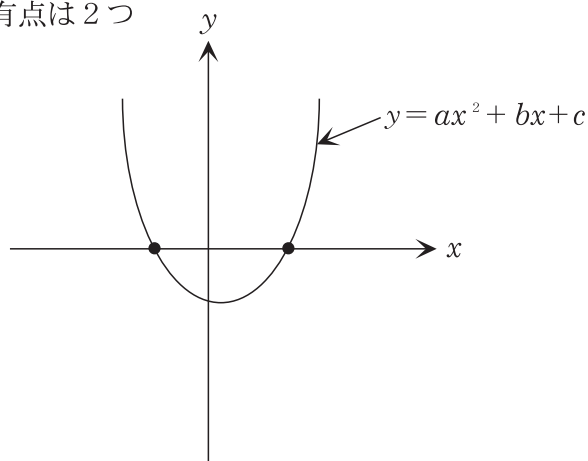
グラフとx軸との共有点の個数は解の公式である。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{の} \quad \sqrt{\quad} \quad \text{のなか}$$

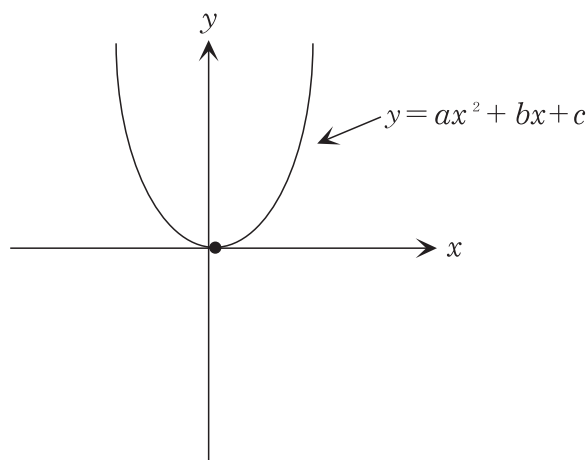
これを判別式といって、一般にはDで表します。

この判別式 $D = b^2 - 4ac$ を使ってチェックします。

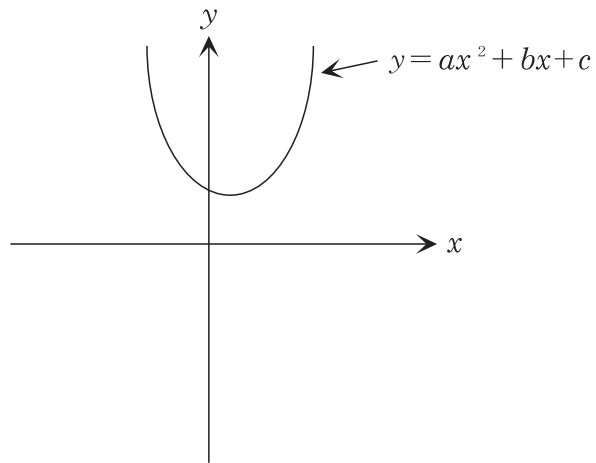
$D > 0$ なら共有点は2つ



$D = 0$ なら共有点は1つ



$D < 0$ なら共有点はなしです。



2章 複素数の計算

2・1 複素数とは？

実数は中学まで習った数です。たとえば -2 , $\sqrt{3}$, 0 などです。 $(-2)^2=4$, $(\sqrt{3})^2=3$, $(0)^2=0$ のように実数を2乗すると0以上になります。このような数字を a , b とすると、複素数は $i^2=-1$ となる i を使って

$$a+bi$$

で表わされます。

掛け算

例. $3i \times 5i = 3 \times i \times 5 \times i = 3 \times 5 \times i \times i$
 $= 15 \times i^2 = 15 \times (-1) = -15 //$

この書き換えがポイントです。

足し算

例. $3i \times 5i = 8i \leftarrow 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ と同じ感じで!!
 $2 + 2i + 4i - 5 = -3 + 6i //$

割り算

例. $5 \div i$ を計算してください。

$$5 \div i = 5 \times \frac{1}{i} = \frac{5}{i}$$

これでよさそうですが、
分母に i は残さない決まりになっています。よって、

$$5 \div i = \frac{5}{i} = \frac{5}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{5i}{i^2} = \frac{5i}{-1} = -5i //$$

()と四則

例. $(2+i)(3-i) + \frac{6}{i}$ を計算してください。

$$(2+i)(3-i) + \frac{6}{i}$$
$$= 6 - 2i + 3i - i^2 + \frac{6}{i} \times \frac{i}{i}$$

$$= 6 - 2i + 3i - (-1) + \frac{6i}{i^2}$$

$$= 6 - 2i + 3i - (-1) + \frac{6i}{(-1)}$$

$$= 6 - 2i + 3i + 1 - 6i$$

$$= 7 + 5i //$$

() は中学までの文字式のやり方で展開します。

そのあと i^2 を -1 に変える。

分母に i があれば分母分子に i を掛ける ($\frac{i}{i} = 1$)

この2つの計算をします。

2・2 複素数の相当

例. $7 + 6i + 9 = (a) + (b)i$ のとき

a と b はどうなるでしょう (ただし、 a, b は実数)

複素数は () + () i の形に整理する。

$$7 + 6i + 9 = 16 + 6i //$$

よって、 $a=16$ $b=6$ です。

例. $(a-2) + (b+1)i = 0$ のとき

a と b を求めてください (ただし a, b は実数)。

$$\underbrace{0 = 0 + 0i}_{\text{重要ポイント}} \text{ と見ます。}$$

重要ポイント

$$(a-2) + (b+1)i = 0 + 0i$$

左辺と右辺を見比べると、

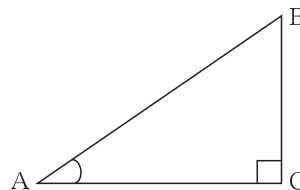
$$a - 2 = 0 \quad b + 1 = 0$$

よって、

$$a = 2 // \quad b = -1 //$$

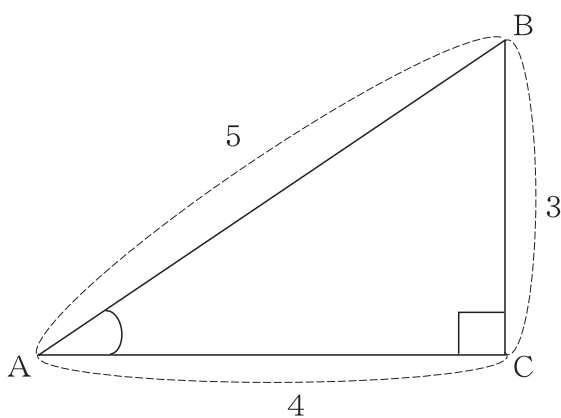
3章 三角関数

まず三角関数が対象とする三角形は直角三角形で、ピタゴラスの定理 $AB^2 = BC^2 + AC^2$ が直り立つ三角形です。



3・1 三角比

三角比とは直角三角形の3つの辺の割合です。



$$\sin A \text{ (サインA)} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A \text{ (コサインA)} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$$

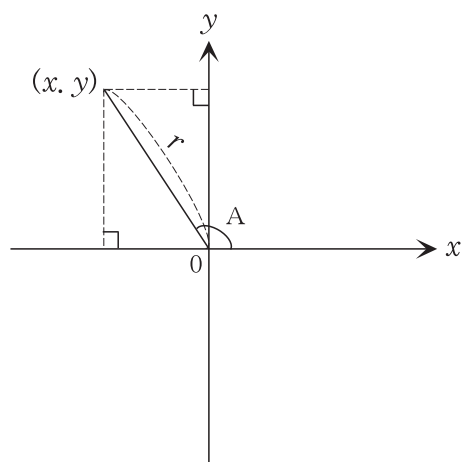
サインもコサインも斜辺が分母です。

さらに、Aをはさむのがコサイン、そうでないほうがサインです。

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$$

タンジェントは直角をはさむ2辺を使います。

$\sin 120^\circ$ や $\cos 135^\circ$ や $\tan 150^\circ$ など鈍角のサイン、コサイン、タンジェントは $x \cdot y$ 座標を使って考えます。



ここで r は上でのべた斜辺になります。

$$\sin A = \frac{y}{r}$$

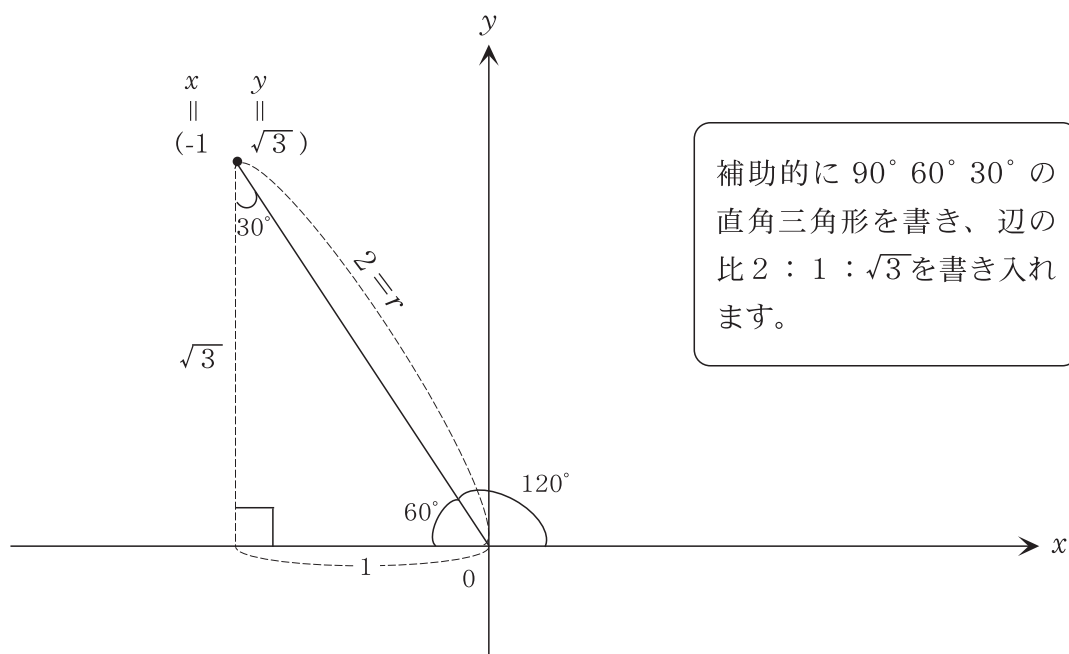
$$\cos A = \frac{x}{r}$$

$$\tan A = \frac{y}{x}$$

この座標で r を 1 としたものを単位円と呼びます。

3・2 鈍角のサイン、コサイン、タンジェント

例. 次に $\sin 120^\circ$ 、 $\cos 120^\circ$ 、 $\tan 120^\circ$ を求めてみます。



棒の先端の座標として $(-1, \sqrt{3})$ を書き入れます。棒の長さは2です。あとは機械的に代入して、

$$\sin A = \frac{y^{(\sqrt{3})}}{r_{(2)}} = \frac{\sqrt{3}}{2} //$$

$$\cos A = \frac{x^{(-1)}}{r_{(2)}} = -\frac{1}{2} //$$

$$\tan A = \frac{y^{(\sqrt{3})}}{x^{(-1)}} = -\sqrt{3} //$$

となります。

$$3 \cdot 3 \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

ここで、 $\sin A$ は $r=1$ のときの y の値である事が分かります。 $\cos A$ も、 $r=1$ のときの x の値であることも分かります。よって、 $y^2+x^2=1$ つまり、 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ という半径1の円周上に (x, y) は存在することになります。

ここで $\sin^2 A$ は $(\sin A)^2$

$\sin^2 B$ は $(\sin B)^2$

というように表現する決まりになっています。

ですから、

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ が成り立ちます。

また $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ も成り立ちます。

分子分母を r で割る

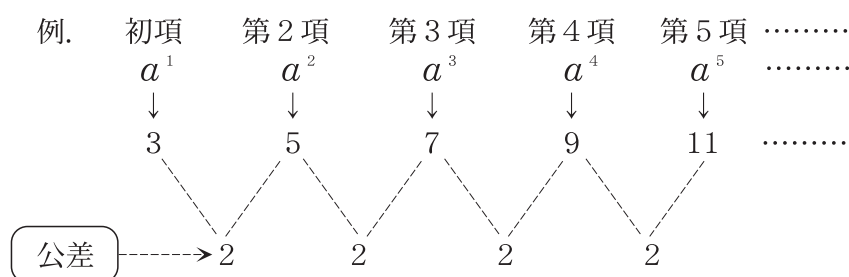
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad //$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad //$$

重要な公式です。

4章 数列

4・1 等差数列の一般項



つまり、隣り合う項の差が等しい数列です。

この差を公差と~~い~~います。

$$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 3 + 2 + 2 + 2$$

↓	↓	↓	↓
a_n	$= a_{n-1} + 2$	$= a_1 + 2 \times (n-1)$	

と表わせます。ここで2は公差 d 、 a_n は第 n 項

a_1 は初項とすると、第 n 項は、

$a_n = a_1 + (n-1)d$ これは等差数列第 n 項

を表わす公式です。

重要ポイント

4・2 等差数列の和

ここで初項1、公差1の等差数列を考えてみましょう。

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{10} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 10 \end{array}$$

この様に1から連続した、10までの数列になります。

これを全部足してみます。

方法1

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 9 + 10 = ?$$

方法2

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 9 + 10 \\ 10 + 9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 \\ + \hline 11 + 11 + 11 + 11 + \cdots + 11 + 11 \end{array}$$

← 順番を反対にして
並べてみます。

この様に順を反対にした数列と元の数列を加えると全て同じ値になります。

この場合11になります。これらの合計は

$$11 \times n = 11 \times 10 = 110 \text{ になります。}$$

同じ数列を足しただけですから、1つの数列の合計は $\frac{110}{2}$ になります。

よって、55 //

これを一般的に表わしてみます。

an の数列(等差)の合計を s とします。

$$\begin{array}{r} s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ s = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 \\ + \hline 2s = (a_1 + a_n) \times n \end{array}$$

よって、 $s = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$ 重要

~~~~~

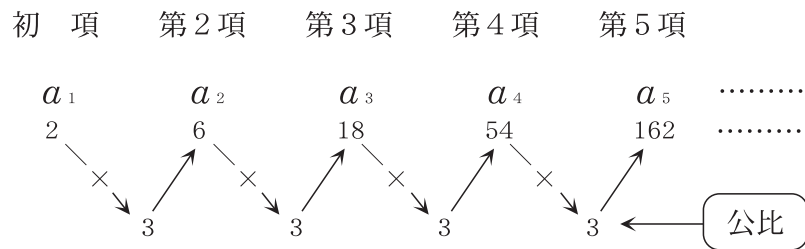
さて、 $a_n = a_1 + (n-1)d$ であったので、

$$s = \frac{\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \times n}{2}$$

$$= \frac{\{2a_1 + (n-1)d\} \times n}{2} \quad //$$

## 4・3 等比数列の一般項

等比数列は以下のような数列です。



例にあげた数列は、初項が2 公比が3の等比数列です。

$$a_2 = 2 \times 3$$

$$a_3 = 2 \times 3 \times 3$$

$$a_4 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$a_5 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$a_n = 2 \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3}_{3^{n-1}}$$

↓  
初項2  
=  $2 \times 3^{n-1}$ となります。

これを一般的に表現しますと、

$$a_n = a, r^{n-1} \quad \text{ただし、} r \text{は公比}$$

~~~~~  
これは、等比数列の重要な公式です。

4・4 等比数列の和

上の等比数列の初項から第4項までの和を s とします。この両辺に公比 3 を掛けたものを $3s$ とします。

$$\begin{array}{r}
 s = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 \\
 3s = \quad \underbrace{2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4}_{\text{この部分は同じ}} \\
 \hline
 s - 3s = 2 - 2 \times 3^4
 \end{array}$$

$$(1 - 3)s = 2(1 - 3^4)$$

$$s = \frac{\overset{\text{初項}}{2} \times \overset{\text{項数}}{(1 - 3^4)}}{\underset{\text{公比}}{1 - 3}}$$

ですから、この式から一般式である等比数列の和の公式が予測できます。

初項が a_1 で公比が r ($r \neq 1$) の等比数列の初項から等 n 項までの和 s は、

$$s = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

重要ポイント

例. 等比数列. 4, 12, 36 …… の初項から第7項までの和を求めてください。

初項 $a_1 = 4$ 、公比 $= \frac{12}{4} = 3$ 項数 $n = 6$ だから

$$s = \frac{4 \times (1 - 3^7)}{1 - 3}$$

$$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 9 \times 9 \times 9 \times 3$$

$$= 81 \times 27 = 2187$$

$$= \frac{4 \times (1 - 2187)}{-2}$$

$$= \frac{4 \times (-2186)}{-2} = 2 \times 2186 = 4372 \quad //$$

4・5 Σ の計算

Σ (シグマ) の意味

例. $\sum_{k=1}^4 2k$ は $2k$ の $k=1$ から $k=4$ までの値

具体的には $k=1, k=2, k=3, k=4$ を代入して足してくださいという意味です。

$$\sum_{k=1}^4 2k = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 20 //$$

例. $\sum_{k=1}^3 (3k-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) = 15 //$

Σ (シグマ) の公式

$\sum_{k=1}^n k$ は初項 1 の公差 1、第 n 項までの等差数列の和であるので、

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n (n+1)$$

~~~~~ 公式 1

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$$

~~~~~ 公式 2

$$\sum_{k=1}^n c = cn \quad \text{ただし } c \text{ は定数}$$

~~~~~ 公式 3

おぼえてしま  
いましょう。



# 5章 指数と対数

## 5・1 指数法則

$$\text{~~~~~} a^m \times a^n = a^{m+n} \text{~~~~~} \text{法則 1}$$

たとえば、

$$a^3 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{3+2}$$

となります。

$$\text{~~~~~} (a^m)^n = a^{mn} \text{~~~~~} \text{法則 2}$$

たとえば、

$$(a^3)^2 = (a^3) \times (a^3) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 = a^{3 \times 2}$$

となります。

$$\text{~~~~~} (ab)^n = a^n b^n \text{~~~~~} \text{法則 3}$$

たとえば、

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = a^3 b^3$$

となります。

$$\text{~~~~~} a^m \div a^n = a^{m-n} \text{~~~~~} \text{法則 4}$$

たとえば、

$$a^5 \div a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a \times a}{\cancel{a} \times \cancel{a}} = a^3 = a^{5-2}$$

となります。

法則1から4までを組み合わせる練習をしましょう。

例.  $2^2 \times 2^5 \div 2^4$

$$\begin{array}{l}
 2^2 \times 2^5 \div 2^4 \\
 \downarrow \leftarrow \boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}} \quad \text{法則 1} \\
 = 2^{2+5} \div 2^4 \\
 \downarrow \leftarrow \boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}} \quad \text{法則 4} \\
 = 2^{2+5-4} = 2^3 //
 \end{array}$$

例.  $(ab)^3 \times a^5 \div b^2$

$$\begin{array}{l}
 (ab)^3 \times a^5 \div b^2 \\
 \downarrow \leftarrow \boxed{(ab)^n \times a^n b^n} \quad \text{法則 3} \\
 = a^3 b^3 \times a^5 \div b^2 \\
 = a^3 \times a^5 \times \underbrace{b^3 \div b^2}_{\downarrow \leftarrow \boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}} \quad \text{法則 4}} \\
 = a^{3+5} \times b^{3-2} = a^8 b^1 = a^8 b //
 \end{array}$$

## 5・2 対数とはどんな数？

$$2^x = 4 \longrightarrow x = 2$$

$$2^y = 8 \longrightarrow y = 3$$

さて、 $2^z = 5$  のとき、 $z$  はいくつでしょう？

この場合  $z$  を、 $\log_2 5$  と書くことにします。

これが対数です。

$\log_2 5$  は 2 を  $\log_2 5$  乗すると 5 になる数です。

$$2^{\log_2 5} = 5 \text{ です。}$$

## 5・3 対数の性質

$$\textcircled{1} \quad \underline{\log_a 1 = 0} \quad a^0 = 1 \rightarrow 0 = \log_a 1$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\log_a a = 1} \quad a^1 = a \rightarrow 1 = \log_a a$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{\log_a m + \log_a n = \log_a mn} \quad \leftarrow \text{同じ}$$

$$\underline{\log_a mn = \log_a m + \log_a n} \quad \leftarrow$$

例として

$$\log_2 5 + \log_2 6 = \log_2 (5 \times 6) = \log_2 30$$

逆に

$$\begin{aligned} \log_2 30 + \log_2 (5 \times 3 \times 2) &= \log_2 5 + \log_2 3 + \log_2 2 \\ &= \log_2 5 + \log_2 3 + 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \underline{\log_a m^p = p \log_a m} \quad \swarrow \textcircled{3} \text{より}$$

$$\log_a m^2 = \log_a (m \times m) = \log_a m + \log_a m = 2 \log_a m$$

$$\begin{aligned} \log_a m^3 &= \log_a (m \times m \times m) = \log_a m + \log_a m + \log_a m \\ &= 3 \log_a m \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \quad \underline{\log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n}} \quad \leftarrow \text{同じ}$$

$$\underline{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n} \quad \leftarrow$$

例として

$$\log_2 6 - \log_2 5 = \log_2 \frac{6}{5}$$

反対に

$$\log_a \frac{6}{5} = \log_2 6 - \log_2 5$$

## 5・4 対数の総合計算

例  $\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 12$

$$\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 12$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \longleftarrow \textcircled{3} \\ = \log_3 (18 \times 6) - \log_3 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \longleftarrow \textcircled{5} \\ = \log_3 \left( \frac{18 \times 6}{12} \right) \end{array}$$

$$= \log_3 9 = \log_3 3^2$$

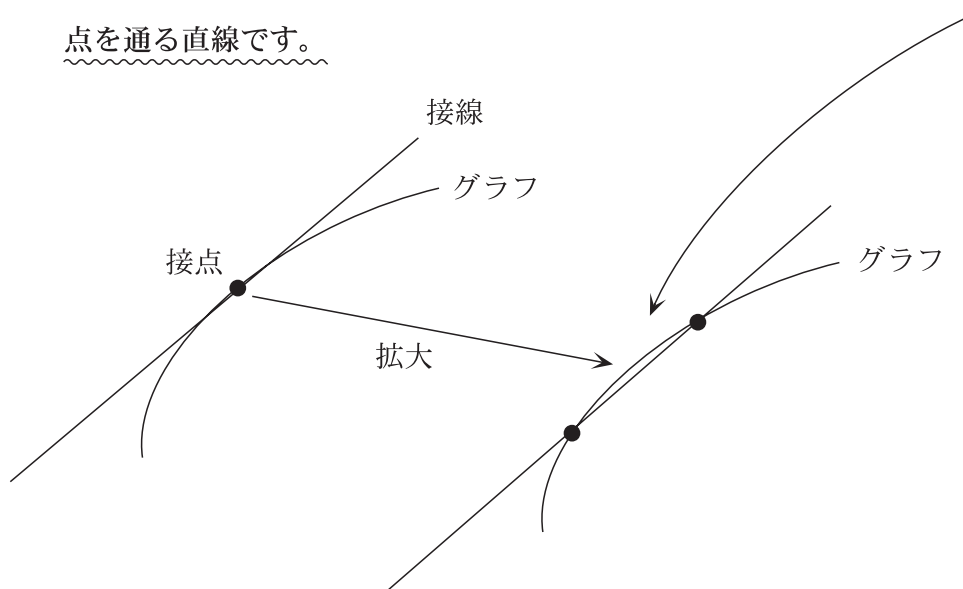
$$\begin{array}{c} \downarrow \longleftarrow \textcircled{4} \\ = 2 \log_3 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \longleftarrow \textcircled{2} \\ = 2 // \end{array}$$

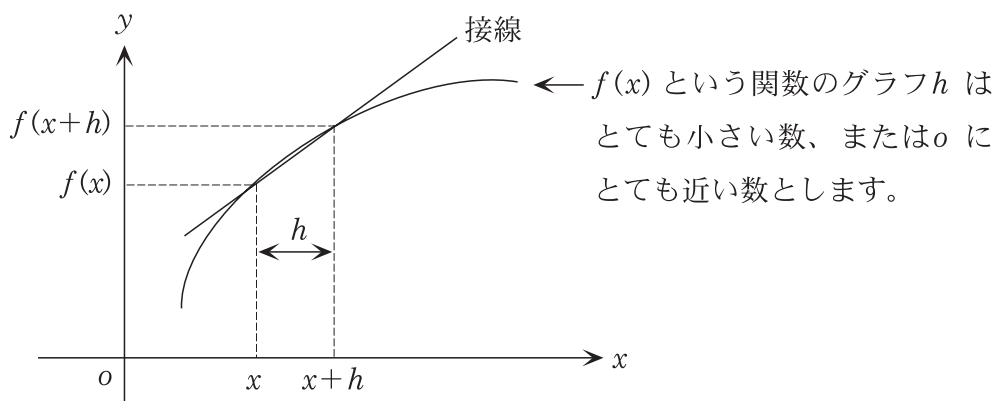
# 6章 微分と積分

6・1 微分するとは、ある関数をグラフに表した際その接線の傾きを求めることです。

接線とはグラフに接する直線ですが、図に示すように、非常に接近した2点を通る直線です。



よって、微分することは非常に接近した2点を通る直線の傾きを求めることです。



すると接線の傾きは

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \text{ になります。}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} //$$

ここで  $h$  は  $0$  に近い数なので、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ と表します。}$$

これが、関数  $f(x)$  の微分を表します。

通常これを、 $f'(x)$  と表します。

$$\underbrace{f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{~~~~~}}$$

$f(x) = x$  のときはどうでしょう。

$$f'(x) = (x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 //$$

ただし、 $y=x$  のグラフは傾き  $1$  ですから、

このようにして求めなくても良いでしょう。

## 6・2 微分の公式

$f(x) = x^2$  のときは、グラフが曲線なので  $x$  によって、傾きが変化します。

$$\begin{aligned} f'(x) = (x^2)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cancel{h}x}{\cancel{h}} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} \\ &= 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= 2x + 0 \\ &= 2x // \end{aligned}$$

$f(x) = x^3$  のときは、

$$\begin{aligned} f'(x) = (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)(x^2 + 2hx + h^2) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} + 2hx^2 + xh^2 + hx^2 + h^2x + h^3 - \cancel{x^3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx^2 + hx^2 + h^2x + h^2x + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx^2 + 2hx^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} 2hx + \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 3x^2 // \end{aligned}$$

$f(x) = x^4$  のときは結果だけ示しますと、

$$f'(x) = 4x^3 \text{ になります。}$$

結果をまとめてみますと、

$$f(x) = x \text{ のとき } f'(x) = (x)' = 1$$

$$f(x) = x^2 \text{ のとき } f'(x) = (x^2)' = 2x$$

$$f(x) = x^3 \text{ のとき } f'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \text{ のとき } f'(x) = (x^4)' = 4x^3$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ f(x) = x^n & \text{ のとき } & f'(x) = (x^n)' & = nx^{n-1} \end{array}$$

が見えてきます。

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

重要公式

例.  $f(x) = 5x^3$  の微分

$$f'(x) = 5 \times (3x^2) = 15x^2 //$$

例.  $f(x) = 5x^3 + 30x$  の微分

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times (3x^2) + 30 \\ &= 15x^2 + 30 // \end{aligned}$$

例.  $f(x) = (x+5)(2x-1)$  初めに ( ) をはずします。

$$f(x) = 2x^2 - x + 10x - 5 = 2x^2 + 9x - 5$$

$$f'(x) = (2x^2 + 9x - 5)' = 4x + 9 //$$



## 6・3 不定積分の公式

不定積分とは以下のような微分とは逆の処理をする事になります。いいかえれば、

$\int x dx$  (インテグラル、エックス、ディーエックス) 微分して  $x$  になる式はという意味です。

$\int x^2 dx$  (インテグラル、エックス 2 乗、ディーエックス) 微分して  $x^2$  になる式はという意味です。

$\int x^3 dx$  (インテグラル、エックス 3 乗、ディーエックス) 微分して  $x^3$  になる式はという意味です。

$\int x^4 dx$  (インテグラル、エックス 4 乗、ディーエックス) 微分して  $x^4$  になる式はという意味です。

不定積分の公式は以下の通りです。

定数  $c$  がどんな値でも微分すると 0 なので、積分した場合  $c$  という不確定の定数を書きます。

$$\int dx = x + c \quad c \text{ は定数}$$

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c \quad c \text{ は定数}$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c \quad c \text{ は定数}$$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c \quad c \text{ は定数}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + c && \text{のとき } f'(x) &= 1 \\
 f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + c && \text{のとき } f'(x) &= \frac{2}{2}x = x \\
 f(x) &= \frac{1}{3}x^3 + c && \text{のとき } f'(x) &= \frac{3}{3}x^2 = x^2 \\
 f(x) &= \frac{1}{4}x^4 + c && \text{のとき } f'(x) &= \frac{4}{4}x^3 = x^3
 \end{aligned}$$

$f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$  より

例  $\int 4x dx$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \int x dx = 4 \times \left( \frac{1}{2}x^2 \right) + c \\
 &= 2x^2 + c \quad c \text{ は定数} //
 \end{aligned}$$

例  $\int (3x^2 + 2) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int 3x^2 dx + \int 2 dx \\
 &= 3 \int x^2 dx + 2 \int dx \\
 &= 3 \left( \frac{1}{3}x^3 \right) + 2x + c \\
 &= x^3 + 2x + c \quad (c \text{ は定数}) //
 \end{aligned}$$

## 6・4 定積分の計算

定積分とは以下のようなものです。

$$\int_2^8 x dx \quad (\text{インテグラル、2から8まで、エックス、ディーエックス})$$

$$\int_3^4 x^2 dx \quad (\text{インテグラル、3から4まで、エックス2乗、ディーエックス})$$

$$\int_{-1}^8 x^3 dx \quad (\text{インテグラル、-1から8まで、エックス3乗、ディーエックス})$$

$$\int_{-1}^2 (6x + 2) dx$$

$$\int_{-1}^6 (2x^2 - 3x - 5) dx$$

---

$f(x)$  の微分式を定積分してみましよう。

$\int_b^a f'(x) dx$  は次のように書き換えます。

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

$c$  は定数なので

$$\int_b^a f'(x) dx = \left[ \int f'(x) dx \right]_b^a$$

$$= \int f'(a) dx - \int f'(b) dx$$

$$= f(a) + c - (f(b) + c)$$

$$= f(a) - f(b) //$$

ここだけ注目すると、

$$\left[ \int f'(x) dx \right]_b^a \rightarrow f(a) - f(b) \text{ のことです。}$$

[ ]の中には定積分した関数で定数  $c$  をのぞいたものを入れる。

例 
$$\left[ 5x^2 \right]_1^5 = 5 \times 5^2 - 5 \times 1^2 = 120 //$$

では実際に定積分をといて見ましょう。

例

$$\int_2^5 x dx$$
 を計算しましょう。

不定積分  $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$  の  $c$  を省いた

$\frac{1}{2} x^2$  を使って、計算します。

$$\begin{aligned} \int_2^5 x dx &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_2^5 = \frac{1}{2} \times 5^2 - \frac{1}{2} \times 2^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 25 - \frac{1}{2} \times 4 \\ &= \frac{25-4}{2} = \frac{21}{2} // \end{aligned}$$

例

$$\int_3^4 6x^2 dx$$
 を計算しましょう。

$$\begin{aligned} \int_3^4 6x^2 dx &= 6 \int_3^4 x^2 dx = 6 \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_3^4 \\ &= 6 \times \left( \frac{1}{3} 4^3 - \frac{1}{3} 3^3 \right) \\ &= 6 \times \left( \frac{1}{3} \times 64 - \frac{1}{3} \times 27 \right) = 128 - 54 \\ &= 74 // \end{aligned}$$

例

$\int_1^3 (3x^2 + 2x) dx$  を計算しましょう。

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x) dx = \int_1^3 3x^2 dx + \int_1^3 2x dx$$

$$= 3 \int_1^3 x^2 dx + 2 \int_1^3 x dx$$

$$= 3 \times \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 + 2 \times \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3$$

$$= 3 \times \left( \frac{1}{3} \times 3^3 - \frac{1}{3} \times 1^2 \right) + 2 \times \left( \frac{1}{2} \times 3^2 - \frac{1}{2} \times 1^2 \right)$$

$$= 3^3 - 1 + 3^2 - 1$$

$$= 27 - 1 + 9 - 1 = 34 //$$

