数学（入門）

中学2年生教材

$\boxed{1}$ 数学の学習教材は，次に示すように3つに分かれています。

Ⅰ）数学　入門　：高校以前の復習から学習を始めます。

Ⅱ）数学　初級　：2次関数，三角比等を学習します。主に高校数学Ⅰ，数学 A で学ぶ内容の一部です。

Ⅲ）数学　中級　：三角関数，指数関数，対数関数の学習をします。主に高校数学Ⅱで学ぶ内容の一部です。

$\boxed{2}$ これらの教材はみなさんのこれまでの学習状況によって，次のような組み合わせで選択して学習してください。

「数学　入門」または「数学　初級」を受講，あるいは「数学　初級」か「数学　中級」を受講のいずれかを選択してください。（入門，初級，中級とすべて受講しても構いません。）

$\boxed{3}$ 本学習教材は「数学　入門」で，中学校の復習を中心とした内容です。
自信のない，あるいは分からなかった箇所を重点的に復習してください。

$\boxed{4}$ 確認して欲しい点として，本学習教材は中学1年生から3年生までに習う数学範囲を全て復習することはできません。また，**本学習教材は，「中学校数学学習サイト/Mathematic Website」の承諾を得て，3年生までの範囲の中から「受講前テスト」で出題した内容の要点を抜粋して掲載しています。**もう一度，基礎をしっかり勉強したい，理解したいと考えている人は，「中学校数学学習サイト/Mathematic Website」を検索して復習することをお勧めします。どうか本教材がみなさんの大学での学びに繋がることを期待しております。

■2年の範囲
①式の計算

式の計算 2

かけ算(乗法)

数字どうし、文字どうしかけ算する

例

$3a^2y\times 5ay^3=3\times 5\times a^2y\times ay^3=15a^3y^4$

累乗・・・同じ文字の積は累乗で表す。$a\times a\times a\times a=a^4$

(　)の外に累乗があるときは(　)の中すべてかける $(-a)^2=(-a)\times(-a)=a^2$

【例題】 次の計算をしなさい。

【答】 (1) $20a^2c^4$　　(2) $3a^3y^4$

割り算(除法)

割り算は逆数のかけ算にする。

数字は数字どうしで約分、分母と分子に同じ文字があれば約分する。

例

$$12a^3y^5\div 3ay^2 = 12a^3y^5\times\frac{1}{3ay^2}$$

$$=\frac{12a^3y^5}{3ay^2}$$

$$=\frac{\overset{4}{\cancel{12}}\times\cancel{a}\times a\times a\times\cancel{y}\times\cancel{y}\times y\times y\times y}{\cancel{3}\times\cancel{a}\times\cancel{y}\times\cancel{y}}$$

$$=4a^2y^3$$

【例題】 次の計算をしなさい。
(1) $20a^3c^2 \div 5ac$ (2) $8m^3n^2 \div 4m^3n$

【答】(1)$4a^2c$ (2)$2n$

掛け算、割り算の混ざった計算

「割り算を逆数のかけ算にする。」ことを徹底しましょう。
それができていないと計算間違いが多くなります。
例

$$
\begin{aligned}
12a^2y^3 \div 2xy^2 \times 4x &= 12a^2y^3 \times \frac{1}{2xy^2} \times 4x \\
&= \frac{48x^3y^3}{2xy^2} \\
&= 24x^2y
\end{aligned}
$$

式による説明 準備

式による説明とは、数について、ある性質が成り立つことを文字を使った式で説明すること。

慣れないと難しく感じますが、準備(このページ)をしっかり理解して身につけておけば簡単です

準備1 文字を使って数を表す
倍数

整数に3をかけてできる数を3の倍数といいます。 3×1=3, 3×2=6, 3×3=9・・・
つまり、3の倍数は3×整数です。**整数をnとして、3の倍数は3nと表せます。**
同じようにnを整数として4の倍数は4n, 11の倍数は11nなど

と表すことができます。また、2 の倍数は偶数のことなので**偶数は 2n と表せます。**

n を整数とすると
偶数・・・2n, 3 の倍数・・・3n, 4 の倍数・・・4n, 11 の倍数・・・11n

あまり

3 の倍数は、3 で割り切れる数です。3n÷3=n, 3÷3=1, 6÷3=2・・・
3 で割り切れる数に 1 を足すと 3n+1, 3+1=4, 6+1=7, 9+1=10・・・
割り切れる数に余分な 1 を足しているのでこれらの数を 3 で割ると 1 あまります。
つまり 3n+1 は 3 で割ると 1 あまる数を表しています。
同じように 3n+2 は 3 で割ると 2 あまる数、 7n+4 は 7 で割ると 4 あまる数です。
また 2n+1 は 2 で割ると 1 あまる数、つまり 2 で割り切れない数＝奇数を表します

n を整数とすると
3 で割ると 1 余る数・・・3n+1 7 で割ると 4 余る数・・・7n+4 奇数・・・2n+1

連続する数

3 つの連続する自然数、例えば 3, 4, 5 や 10, 11, 12 など
連続する自然数はかならず 1 ずつ大きくなるので、はじめの自然数を n とすると次は n+1,その次は n+2 となります。
つまり 3 つの連続する自然数は、はじめの自然数を n として n, n+1, n+2 と表せます。
3 つの連続する奇数、たとえば 5, 7, 9 や 17, 19, 21 など
n を自然数とすると奇数は 2n+1 なので 2 つ目は 2 を加えて 2n+3, その次はさらに 2 を加えて 2n+5 となります。
同じようにして 3 つの連続する偶数は 2n, 2n+2, 2n+4 と表せます。

※自然数ではn-1からはじめてn-1, n, n+1,奇数では2n-1からはじめて2n-1, 2n+1, 2n+3などでもかまわない

nを最初の自然数とすると
3つの連続する自然数　n, n+1, n+2
nを整数とすると
連続する3つの奇数　2n+1, 2n+3, 2n+5　連続する3つの偶数2n, 2n+2, 2n+4

2けたの自然数

2けたの自然数76では、十の位の数が7、一の位の数が6です。これは76は10が7個と1が6個でできていることを表しています。 つまり76=10×7+1×6。文字を使って十の位の数をa, 一の位の数をbとすると 2けたの自然数は10a+b。 同様に3けたの自然数は百の位の数x,十の位の数y, 一の位の数zとして100x+10y+zとなります。

十の位の数をa, 一の位の数をbとすると
2けたの自然数は10a+b

準備2　分配法則の逆

式による説明では1年生で習った分配法則の逆の計算を使います。
分配法則　3(x+5)=3x+15
逆　3x+15 = 3×x+3×5 = 3(x+5)　←各項に共通にかかっている数を考えてそれをカッコの外に出す

例① 12x+30y = 6(2x+5y)　②2n+6 = 2(n+3)

問題　分配法則の逆を計算しなさい。
①7x+21y　②6a-33b　③5n+10

【答】 ①7(x+3y) ②3(2a-11b) ③5(n+2)

式のよる説明　解答の仕方

式による説明

式による説明は3つの部分でできています。
1つ目は文字で表す。2つ目は計算。3つ目は結論です。

例題 1

3つの連続する偶数の和は 6 の倍数になる。これを説明せよ。

A　　　B　　　C

A の部分を文字で表し、計算は B(和)を行い、最後に計算の結果が C の結論となることを説明します。

A を文字で表す

3つの連続する偶数は、n を整数として 2n, 2n+2, 2n+4 と表せる。

上で作った文字式の和を計算する(このとき分配法則の逆をおこなう)

$2n+(2n+2)+(2n+4)=6n+6$

$=6(n+1)$ 分配法則の逆

計算の結果が C の結論となっていることを説明。

n が整数であれば(n+1)も整数なので 6(n+1)は 6×整数となり 6 の倍数である。

よって 3つの連続する偶数の和は 6 の倍数となる。

例題 2

2けたの自然数 P がある。P の十の位の数と一の位の数を入れ替えた数を Q とする。P+Q が 11 の倍数になることを説明せよ。

文字で表す

十の位の数を x, 一の位の数を y とすると 2けたの自然数 P は 10x+y となる。

また、十の位の数と一の位の数を入れ替えた数 Q は 10y+x となる。

計算する

P + Q=(10x+y) +(10y+x)

=11x + 11y

=11(x + y)

結論をまとめる

x, y ともに整数だから(x + y)は整数で、11(x + y)は 11×整数なので 11 の倍数である。よって P+Q の和は 11 の倍数となる。

②連立方程式

連立方程式の解き方

連立方程式とは 2 つの文字(x と y)を含み、2つの式からなる方程式のことです。
連立方程式の解き方には代入法と加減法があります。

1. 代入法

片方の式を x, または y について解き、残りの式に代入する。

例 $\begin{cases} x+y = 3 & \ldots ① \\ 2x+5y = 9 & \ldots ② \end{cases}$

①の式をxについて解く　$x=-y+3 \ldots ①'$　←このときyについて解いても良い

①'を②に代入して計算する　$2(-y+3)+5y = 9$

$$-2y+6+5y = 9$$

$$3y = 9-6$$

$$3y = 3$$

$$y = 1 \quad \ldots ③$$

③を①に代入して計算する　$x+1 = 3$　←このとき②に代入しても良い

$$x = 2$$

答　$x=2$

【例題】代入法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} x+2y = 3 \\ 2x+5y = 5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+y = 1 \\ 5x+2y = 1 \end{cases}$

【答】(1)x = 5, y = -1　(2)x = 1, y = -2

2. 加減法

x, または y の係数をそろえて2つの式をたすか、ひくかして文字を一つ消す。

x, またはyの係数をそろえて2つの式をたすか、ひくかして文字を一つ消す。

例 $\begin{cases} 3x+2y = 8 \ \ldots① \\ 2x+5y = 9 \ \ldots② \end{cases}$

①×2

$6x+4y = 16\ldots①'$

②×3

$6x+15y = 27\ldots②'$

← xの係数を同じにするため①に2をかけて②には3をかけます。 必ず両辺にかけること。

今回はxの係数を同じにしていますがyのほうがやりやすいとおもったらyの係数をおなじにしてもかまいません。

①' − ②'

$$\begin{array}{r} 6x+4y = 16 \\ -)\ 6x+15y = 27 \\ \hline -11y = -11 \\ y = 1\ldots③ \end{array}$$

③を①に代入

$$3x+2\times1 = 8$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

答え　$x=2$, $y=1$

【例題】加減法で解きなさい

(1) $\begin{cases} 3x+8y = 7 \\ 2x+5y = 5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 7x+3y = 1 \\ 5x+2y = 1 \end{cases}$

【答】(1)x = 5, y = −1　(2) x = 1, y = −2

いろいろな連立方程式

A=B=C の形

A＝B＝Cの形の連立方程式は

$\begin{cases} A = B \\ A = C \end{cases}$ 、または $\begin{cases} A = B \\ B = C \end{cases}$ 、または $\begin{cases} B = C \\ A = C \end{cases}$ の形にして計算する

計算しやすい組み合わせにするとよい。

例　$4x+y=-x-y=3$　を解く

$\begin{cases} 4x+y = 3 \cdots ① \\ -x-y = 3 \cdots ② \end{cases}$ ←この形にしてあとは普通に計算する

①＋②

$$\begin{array}{rrl} & 4x+y & = 3 \\ +) & -x-y & = 3 \\ \hline & 3x & = 6 \\ & x & = 2 \cdots ③ \end{array}$$

③を②に代入

$$\begin{aligned} -2-y &= 3 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

係数を求める

解が与えられている場合、解を代入する

例

$\begin{cases} ax+by=7 \\ bx+2ay=4 \end{cases}$ の解が$x=2$，$y=1$のときのa，bの値を求める。

解を式に代入してa,bの連立方程式として解く。

$\begin{cases} 2a+b=7 \cdots ① \\ 2a+2b=4 \cdots ② \end{cases}$

①－②

$$\begin{array}{rrl} & 2a+b & = 7 \\ -) & 2a+2b & = 4 \\ \hline & -b & = 3 \\ & b & = -3 \cdots ③ \end{array}$$

③を①に代入

$$\begin{aligned} 2a-3 &= 7 \\ 2a &= 10 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

連立方程式の文章題 1

数量の関係を等式にする(方程式をたてるための準備)

文章中の数量の関係から等式をつくる。このとき分からない数や量を x や y におく。(求めるものを x,y にすることが多い)

数量の関係とは

- ○と△が等しい ⇒ ○ = △
- ○と△の合計が□ ⇒ ○ + △ = □
- ○より△のほうが□大きい ⇒ △ − ○ = □

例

A君の点数x点は、B君の点数y点より5点高い。⇒$x-y=5$

太郎の体重$x$kgと花子の体重$y$kgの合計は100kgである。 ⇒ $x+y=100$

1本x円のボールペン12本の代金はy円である。 ⇒ $12x=y$

問題　数量の関係を等式にせよ。

① 1本120円のボールペンx本の代金がa円だった。

② 1回目のテストがx点、2回目がy点、3回目が80点だったので1から3回のテストの合計が200点になった。

③ 太郎の身長160cmは、次郎の身長$y$cmより$p$cmだけ高い。

④ ひろしはx歳、まさるは16歳、花子はy歳。ひろしの年齢とまさるの年齢の和は花子の年齢の2倍に等しい。

⑤ 大根1本100円、ピーマン1袋80円。大根をx本とピーマンを1袋の代金の合計がy円だった。

【答】 ① 120x=a ② x+y+80=200 ③ 160-y=p ④ x+16=2y ⑤ 100x+80=y

買い物問題

代金＝数量×単価

例題 1

1個120円のりんごと1個150円のなしを合わせて10個買ったら、代金の合計が1440円だった。りんごとなしはそれぞれ何個買ったのか。

りんごの数をx個，なしの数をy個とする。
問題には 合わせて10個と、代金の合計が1440円の2箇所で数量の関係が示されているので、この部分から等式がつくれる。
数量の関係を整理するために表をかいてもよい

	りんご	なし	合計
単価	120円	150円	-
個数	x	y	10
代金	$120x$	$150y$	1440

個数は合わせて10個なので　$x+y=10$
代金の合計は1440円なので　$120x+150y=1440$

$$\begin{cases} x+y = 10 \\ 120x+150y = 1440 \end{cases}$$

これを解くと $x=2$，$y=8$

答　りんご2個、なし8個

例題 2

ボールペン3本と、鉛筆5本の代金の合計が870円で、ボールペン5本と鉛筆6本の代金の合計が1170円だった。ボールペンと鉛筆のそれぞれ1本の値段を求めよ。

ボールペン1本x円、鉛筆1本y円とする。
合計代金が870円のときと1170円のときの2つで式がつくれる。

	ボールペン	鉛筆	
単価	x円	y円	
個数	3	5	
代金	$3x$	$5y$	870

	ボールペン	鉛筆	
単価	x円	y円	
個数	5	6	
代金	$5x$	$6y$	1170

$$\begin{cases} 3x+5y=870 \\ 5x+6y=1170 \end{cases}$$
これを解いて$x=90$, $y=120$

答　ボールペン90円、鉛筆120円

問題　連立方程式をたてて答えよ。

① 1本150円の大根と1本90円のにんじんを合わせて7本買った。代金の合計は690円だった。大根とにんじんそれぞれ何本買ったのか。

② みかんを10個と柿を3個買うと代金の合計が1400円、　みかんを6個と柿を5個買うと代金の合計が1480円である。みかんと柿それぞれ1個の値段を求めよ。

③ 1790円でケーキ5個とプリン3個買うつもりだったが、ケーキとプリンの個数をとりちがえてしまったので代金が1650円になった。ケーキとプリンそれぞれ1個の値段を求めよ。

【答】

① 大根をx本、にんじんy本買ったとする。

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 150x+90y=690 \end{cases}$$
答　大根1本、　にんじん6本

② みかん1個x円、柿1個y円とする。

$$\begin{cases} 10x+3y=1400 \\ 6x+5y=1480 \end{cases}$$
答　みかん1個80円、柿1個200円

③ ケーキ1個x円、プリン1個180円とする。

$$\begin{cases} 5x+3y=1790 \\ 3x+5y=1650 \end{cases}$$
答　ケーキ1個250円、プリン1個180円

文章題_速さ１

準備

公式

速さとは、単位時間に進んだ道のり。そこから公式を導くことができる。

$$速さ=\frac{道のり}{時間}、\quad 道のり=速さ\times時間、\quad 時間=\frac{道のり}{速さ}$$

数量の関係

合計～、合わせて～などは和の式に、～m遠い、～分早いなどは**差**の式にできる。

例

家から公園までxm，公園から駅までym，合わせて1200m ⇒ $x+y=1200$

同時にスタートしてA君がx分、B君がy分かかった。A君のほうが3分早かった。 ⇒ $y-x=3$

A君の家から学校までxm，B君の家から学校までym,A君の家のほうが100m近い。 ⇒ $y-x=100$

単位の変換

速さの問題では、様々な単位が使われる。

速さの単位・・・m/min(毎分～m)、km/h(毎時～km)など

距離の単位・・・m、km

時間の単位・・・分、 時間

問題のなかで混在している場合は統一する必要がある。その場合**速さの単位を基準に合わせる**。

つまり、速さの単位がkm/hを使っていればすべての距離をkmに、すべての時間を時間に合わせ、速さの単位がm/minならすべての距離をmに、すべての時間を分にあわせる。

例

3km ⇒ 3000m、　4.5km ⇒ 4500m

5時間 ⇒ 300分、　1時間20分 ⇒ 80分

2時間40分 ⇒ $\frac{8}{3}$時間　200分 ⇒ $\frac{10}{3}$時間

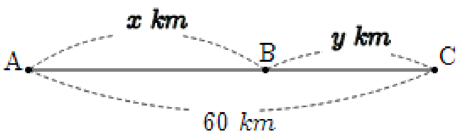
速さの問題

速さの問題ではたいてい求めるものを x, y とする。
図や表をかいて数量の関係を整理すると等式を作りやすい。
単位を統一する。

例題 1

A町からB町を通ってC町まで60kmある。A町からB町まで30km/hですすみ、B町からC町まで40km/hで進んだら合計で1時間48分かかった。
A町からB町までとB町からC町までのそれぞれの道のりを求めよ。

	A～B	B～C
速さ	30	40
道のり	x	y
時間	$\frac{x}{30}$	$\frac{y}{40}$



求めるものを x,y にするので A から B までの道のりを xkm に、B から C までの道のりを ykm にする。 »道のり

表の速さの欄に、問題文中の速さをいれる。 »速さ

表の時間の欄には公式を使って文字式が入る。

時間＝道のり速さを使い、A から B の道のり xkm，速さ 30km/h より »時間 1

B から C の道のり ykm、速さ 40km より »時間 2

問題文中の道のりの関係「A 町から B 町を通って C 町まで 60km」つまり道のりの和が 60km から式をひとつ作る

もうひとつの式は時間の関係「合計で1時間48分」から作る。これは単位を時間になおし $\frac{9}{5}$時間とする　»式2

式 $\begin{cases} x+y=60 \\ \frac{x}{30}+\frac{y}{40}=\frac{9}{5} \end{cases}$

これを解くと$x=36$, $y=24$

よって、　答　A町からB町36km, B町からC町24km

連立文章題　速さ2

例題 1

A町からB町まで180kmある。高速道路と一般道路をつかって車で3時間30分かかった。高速道路では80km/h、一般道路では30km/hで走ったとする。高速道路と一般道路それぞれを走っていた時間を求めよ。

	高速道路	一般道路
速さ	80	30
道のり	80x	30y
時間	x	y

求めるものをx,yにするので高速道路を走っていたのがx時間、一般道路を走っていたのがy時間とする。　»時間

表の速さの欄に、問題文中の速さをいれる。　»速さ

表の道のりの欄には公式を使って文字式が入る。

道のり=速さ×時間 を使い、高速道路80km/h、x時間より »道のり 1

一般道路30km/h、y時間より　»道のり 2

問題文中の時間の関係「高速道路と一般道路をつかって車で3時間30分」つまり時間の和が72時間から式をひとつ作る　»式 1

もうひとつの式は道のりの関係「A町からB町まで180km」から作る。　»式 2

式 $\begin{cases} x+y = \frac{7}{2} \\ 80x+30y = 180 \end{cases}$

これを解くと$x=\frac{3}{2}$, $y=2$

よって、　答　高速道路1時間30分，一般道路2時間

例題 2

A君の家から図書館までは、B君の家から図書館までより200m遠い。 A君とB君が同時に家を出発して図書館へ行くと、B君が1分間早く着く。A君の速さは80m/min、 B君の速さは60m/minとするとき、それぞれの家から図書館までの道のりを求めよ。

	A君の家から図書館	B君の家から図書館
速さ	80	60
道のり	x	y
時間	$\frac{x}{80}$	$\frac{y}{60}$

求めるものを x,y にするので、A 君の家から図書館を xm、B 君の家から図書館を ym とする。 »道のり

表の速さの欄に、問題文中の速さをいれる。 »速さ

表の時間の欄には公式を使って文字式が入る。

時間＝道のり／速さ を使い、A 君は 80m/m i n、歩いた道のり xm なので »時間 1

B 君は速さ 60m/m i n、歩いた道のり ym なので »時間 2

問題文中から「A 君の家から図書館までは B 君の家から図書館までより 200m 遠い」より「A の道のりから B の道のりをひいた差が 200m」という式をつくる。 »式 1

もうひとつの式は時間の関係「B 君が 1 分早く着く」より「A の時間から B の時間を引いた差が 1」という式にする »式 2

式 $\begin{cases} x - y = 200 \\ \dfrac{x}{80} - \dfrac{y}{60} = 1 \end{cases}$

これを解くと$x=560$, $y=360$

よって、　答　A君の家から図書館までは$560m$, B君の家から図書館までは$360m$

連立方程式文章題(割合)

割合

割合とは、全体に対する比率のこと。分数やパーセント(%)、割であらわす。
計算する場合には%や割も分数にする。(小数でも表せるが、計算間違いしやすいため)
1%　→　1／100、　　1割　→　1／10

例
$3\% \to \dfrac{3}{100}$、$x\% \to \dfrac{x}{100}$、3割 $\to \dfrac{3}{10}$、y割 $\to \dfrac{y}{10}$

割合には、**割合のもとになる数**(全体)が必ずある。
「12の $\dfrac{1}{3}$ は4である」といった場合、12が割合のもとになる数である。
「12の $\dfrac{1}{3}$ は4である」を式にすると$12 \times \dfrac{1}{3} = 4$となる。このように割合はもとの数に掛け算する。

例

300の5% → $300 \times \dfrac{5}{100} = 15$　　400の3割 → $400 \times \dfrac{3}{10} = 12$

xの7% → $x \times \dfrac{7}{100} = \dfrac{7}{100}x$　　aの9割 → $a \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{9}{10}a$

500のy% → $500 \times \dfrac{y}{100} = 5y$　　700のc割 → $700 \times \dfrac{c}{10} = 70c$

問題

次の数を計算で求めよ。

① 150の4%　　② 240の1割

③ pの7割　　④ 600のk%

【答】①$150\times\frac{4}{100}=6$　②$240\times\frac{1}{10}=24$　③$p\times\frac{7}{10}=\frac{7}{10}p$　④$600\times\frac{k}{100}=6k$

例題 1

男女合わせて31人のクラスがある。このクラスで自転車通学の生徒は男子の4割と女子の5割のあわせて14人である。このクラスの男子と女子の人数をそれぞれ求めよ。

このクラスの男子をx人、女子をy人とする。

自転車男子は男子全体の4割なので$x\times\frac{4}{10}=\frac{2}{5}x$，

自転車女子は女子全体の5割なので$y\times\frac{5}{10}=\frac{y}{2}$

数量の関係は男子＋女子＝全体、これをクラスの男女、自転車の男女にあてはめると

$$\begin{cases} x+y=31 \\ \frac{2}{5}x+\frac{y}{2}=14 \end{cases}$$

となる。これを解いて$x=15$，$y=16$

答男子15人、女子16人

割合の増減

「600円の1割」は$600\times\frac{1}{10}=60$で60円である。
「600円の1割引」といったら$600-60=540$で540円となる。
つまり「600円の1割引」は**「600円から、600円の1割を引く」**計算である。

yの7%引き →「yからyの7%を引く」　$y-\frac{7}{100}y=\frac{93}{100}y$
4000のa%引き →「4000から4000のa%を引く」
$4000-4000\times\frac{a}{100}=4000-40a$

増加する場合は「引く」ところを「たす」にすればよい。
xの9%増 →「xにyの9%をたす」　$x+\frac{9}{100}x=\frac{109}{100}x$
3000のb%増 →「3000に3000のb%をたす」　$3000+3000\times\frac{b}{100}=3000+30a$

問題
次の数を求めよ。
① 500の17%減　② xの19%引　③ 200のa%増

【答】 ① 415　② 81x／100　③ 200-2a

例題 2

昨年の生徒数が380人で、今年は去年に比べて男子が3％減少し、女子が5％増加したので全体としては3人増加し383人 になった。今年の男子と女子の人数を求めよ。

求めるものは今年でも割合のもとになる数が昨年なので 昨年の男子をx人、昨年の女子をy人とする。

今年の男子は昨年の3％減なので$x - \frac{3}{100}x = \frac{97}{100}x$

今年の女子は昨年の5％増なので$y + \frac{5}{100}y = \frac{105}{100}y$

	男子	女子	全体
昨年	x	y	380
今年	$\frac{97}{100}x$	$\frac{105}{100}y$	383

数量の関係は**男子＋女子＝全体**なので、これを昨年と今年に当てはめて

$$\begin{cases} x+y = 380 \\ \frac{97}{100}x+\frac{105}{100}y = 383 \end{cases}$$

これを解くと $x=200$, $y=180$ これは昨年の男女なので、今年を計算すると

男子$200\times\frac{97}{100} = 194$　女子$180\times\frac{105}{100} = 189$

答 男子194人、女子189人

③1次関数

一次関数

関数とは

2 つの変数 x と y があり、y の値が x の値にともなって変化し、x の値を定めると y の値がただ一つに決まる場合

y は x の関数であるという。

文章を式にする

(例 2)水槽の中には、はじめに 20 リットルの水が入っていた。 そこに毎分 3 リットルずつの水を入れていった。
1 分後に水槽の中にある水の量 → 20+1×3=23
2 分後に水槽の中にある水の量 → 20 + 2×3 = 26
3 分後に水槽の中にある水の量 → 20 + 3×3 = 29
・
10 分後に水槽の中にある水の量 → 20 + 10×3 = 50
・
x 分後に水槽の中にある水の量 → 20 + x×3
水を入れてから x 分後の水槽の中の水の量を y リットルとすると
y = 3x + 20 と表せます。

例では時間が 1 分、2 分、3 分と変化すると水槽の中の水の量もそれにともなって 23 リットル、26 リットル、29 リットルと変化していきます。
この例の時間(分)や水槽の中の水の量(リットル)のような変化する数量のことを**変数**といいます。関数では 2 つの変数のうち片方の変化にともなってもう一方の変数も変化します。

【例題】

(1) 長さが 20 cm のろうそくがある。火をつけると 1 分間に 3 cm ずつ短くなる。 火をつけてから x 分後の全体の長さを y cm とする。 y を x の式で表せ。

(2) 家から駅まで 1200 m ある。家から毎分 50 m で歩いていくとき、 出発してから x 分後の駅までの残りの道のりを y m とする。 y を x の式で表せ。

【答】 (1) y = -3x + 20　(2) y = -50x + 1200

1 次関数(変化の割合)

変化の割合とは

変化の割合　= y の増加量／x の増加量

(例)

① xの増加量が5で、yの増加量が10のとき

変化の割合$=\frac{10}{5}=2$ となる。

② 変化の割合が3で、xの増加量が4のとき

$3=\frac{y\text{の増加量}}{4}$から　yの増加量$=3\times4=12$ となる。

1 次関数と変化の割合

1次関数　y=ax+b　では変化の割合は一定で、a と等しくなる。

(例)　y=2x+10　について

変化の割合は **2** である。

x の増加量が 3 のときの y の増加量は　2×3 = 6　となるので y の増加量は 6 である。

※　x の増加量は x の値ではないので　x=3 を　y = 2x + 10 に代入してはいけない。

2 点から変化の割合を出す

点 (2, 3)　から点 (6, 15)に変化したときの変化の割合

yは3から15まで変化しているので、yの増加量は $15-3=12$

(2, 3)　(6, 15)

xは2から6まで変化しているので、xの増加量は $6-2=4$

変化の割合は　$12\div4=3$　となる。

これを式で表すと

変化の割合$=\frac{15-3}{6-2}=3$

点　(2, -3)から点(6, -11)に変化したときの変化の割合

yは -3から-11まで変化しているので、yの増加量は $-11-(-3)=-8$

(2, −3)　(6, −11)

xは2から6まで変化しているので、xの増加量は $6-2=4$ なので

変化の割合$=\dfrac{-11-(-3)}{6-2}=-2$

1 次関数(式の出し方)

1 次関数の式　　　　　　**$y=ax+b$**

　　a, b は定数(整数や分数などの数字)なので、その数をだせば 1 次関数の式が出ます。

1 次関数の式の出し方には大きく分けて 2 通りあります。

- 傾きと 1 点から出す方法。
- 2 点から出す方法。

1. 傾きと 1 点から出す

(例)　傾き3で、$x=1$のとき$y=-2$となる1次関数の式を求める。

傾きとはaのことなので $a=3$ となります。

つまり $\boldsymbol{y=3x+b}$

この式に $x=1$, $y=-2$を代入してbを出します。

$-2=3\times1+b$

$-b=3+2$

$b=-5$　　　　　　　　よって　$y=3x-5$　となります。

※　1次関数では傾きと変化の割合は同じです。

「$x=1$ のとき $y=-2$ となる」というのは「グラフが点(1, -2)を通る」と同じことです。

2. 2 点から出す

　2 点から 1 次関数の式を出す場合、**まず変化の割合を出します。**

→2 点から変化の割合を出す方法

　あとは(1)傾きと 1 点から出す方法と同じやり方です。

（例）　点$(2,\ 6)$と$(4,\ 14)$を通る1次関数の式

$(2,\ 6)$ と$(4,\ 14)$から変化の割合を出すと

$$変化の割合＝\frac{14-6}{4-2}=4$$

変化の割合4で$(2,\ 6)$を通る1次関数の式　　←$(2,6)$でも$(4,\ 14)$でもどちらを使ってもよい

$y = 4x + b$ に $x=2,\ y=6$を代入してbを出す

$6 = 4\times 2 + b$

$-b = 8-6$

$-b = -2$　　　よって $y = 4x - 2$

※連立方程式を使う方法

傾きを出さずに連立方程式を解いて$a,\ b$を出す方法もあります。

（例）点$(2,\ 6)$と$(4,\ 14)$を通る1次関数の式

$y = ax + b$に $(2,\ 6)$と$(4,\ 14)$をそれぞれ代入すると

$6 = 2a + b$

$14 = 4a + b$　　となります。

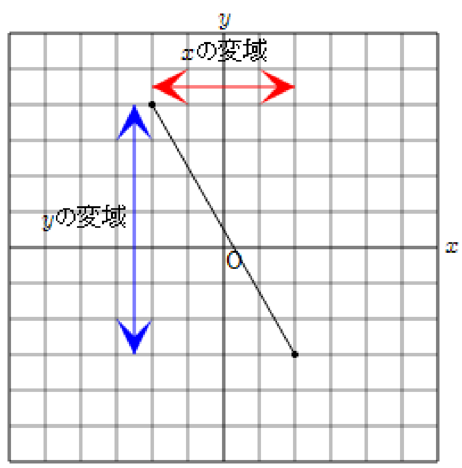
この2式を連立方程式として解くと　$a=4,\ b=-2$となり

1次関数の式は　$y = 4x - 2$　となります

1 次関数(変域)

変域

変域とは、グラフの範囲のこと。
グラフを描いたときの横の範囲が x の変域、縦の範囲が y の変域になる。



直線の式　平行、交点

平行

直線の式　$ax+bx+c=0$

2元1次方程式　$ax+by+c=0$のグラフは直線になる。

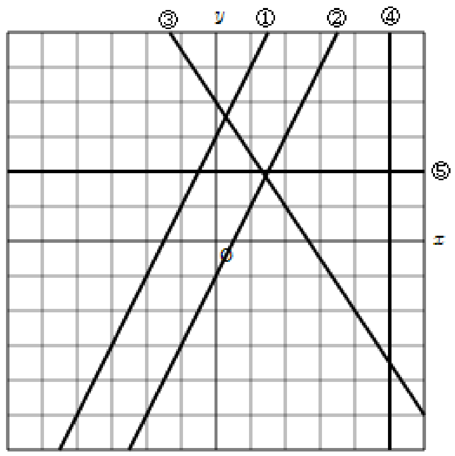
yについて解くと$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$となり、傾き$-\frac{a}{b}$、切片$-\frac{c}{b}$の1次関数のグラフになる。

$a=0$のときは、変数がyだけで$y=k$の形の式になり、$b=0$のとき、変数がxだけで、$x=h$の形になる。

例

それぞれの式をグラフに表す。

① $y=2x+3$　② $y=2x-1$　③ $y=-\frac{3}{2}x+4$　④ $x=5$　⑤ $y=2$



①と②のように傾きが同じ式のグラフは平行になる。

また、④のように$x=h$の式はy軸に平行なグラフになり、⑤のように$y=k$の式はx軸に平行なグラフになる。

直線どうしが平行なら傾きが同じになる。

y軸に平行な直線の式は$x=h$、　x軸に平行な直線の式は$y=k$である。

とくに$x=0$はy軸を表し、$y=0$はx軸を表す。

交点

グラフどうしの交点は式を連立方程式として解いたときの解になる。

例

次のそれぞれのグラフの交点を求める。

① $y=2x+1$と$y=3x-5$

② $y=4x+12$とx軸

③ $y=-3x+10$とy軸

---

① $y=2x+1$と$y=3x-5$を連立方程式として解くと$x=6$, $y=13$よって交点は$(6, 13)$

② x軸は$y=0$なのでこれを$y=4x+12$に代入すると $x=-3$ よって交点は$(-3, 0)$

③ y軸は$x=0$なのでこれを$y=-3x+10$に代入すると$y=10$ よって交点は$(0, 10)$

④図形

平行線と面積

等積変形

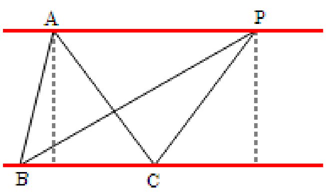
三角形の面積＝底辺×高さ× 1／2

底辺の長さと高さがそれぞれ等しければ面積は等しくなる。

△ABCと底辺BCが共通の△PBCがある。

△ABCと△PBCの面積が等しい場合、両方の三角形の高さが等しいので >>高さ

直線APと直線BCは平行になる。 >>平行



面積比

三角形の面積＝底辺×高さ× 1／2

高さが等しければ**底辺の長さの比が面積比**と等しくなる

△ＡＢＣと△ＡＣＤは底辺が同一直線上にあって頂点Ａが共通なので高さが等しい。

底辺の比ＢＣ:ＣＤ＝a:bなら、面積比△ＡＢＣ:△ＡＣＤ＝a:bとなる。

ＣがＢＤの中点ならＡＣは△ＡＢＤを２等分する。