数学（入門）

中学３年生教材

$\boxed{1}$ 数学の学習教材は，次に示すように3つに分かれています。

Ⅰ）数学　入門　：高校以前の復習から学習を始めます。

Ⅱ）数学　初級　：2次関数，三角比等を学習します。主に高校数学Ⅰ，数学 A で学ぶ内容の一部です。

Ⅲ）数学　中級　：三角関数，指数関数，対数関数の学習をします。主に高校数学Ⅱで学ぶ内容の一部です。

$\boxed{2}$ これらの教材はみなさんのこれまでの学習状況によって，次のような組み合わせで選択して学習してください。

「数学　入門」または「数学　初級」を受講，あるいは「数学　初級」か「数学　中級」を受講のいずれかを選択してください。（入門，初級，中級とすべて受講しても構いません。）

$\boxed{3}$ 本学習教材は「数学　入門」で，中学校の復習を中心とした内容です。
自信のない，あるいは分からなかった箇所を重点的に復習してください。

$\boxed{4}$ 確認して欲しい点として，本学習教材は中学１年生から3年生までに習う数学範囲を全て復習することはできません。また，**本学習教材は，「中学校数学学習サイト/Mathematic Website」の承諾を得て，３年生までの範囲の中から「受講前テスト」で出題した内容の要点を抜粋して掲載しています。**もう一度，基礎をしっかり勉強したい，理解したいと考えている人は，「中学校数学学習サイト/Mathematic Website」を検索して復習することをお勧めします。どうか本教材がみなさんの大学での学びに繋がることを期待しております。

■3年の範囲
①多項式

因数分解 1

因数分解とは展開の逆をすることです。

展開　　(ア) $a(x+y) = ax + ay$
因数分解　(イ) $ax + ay = a(x+y)$

展開の基本は分配法則です。 $a(x+y)$を展開するときは a を x と y の両方にかけて $ax+ay$ とします。$ax + ay$ を因数分解するときには各項に a がかけられていることに着目します。「a が共通」ということは(ア)の展開のように「a がカッコの外にあって分配法則で各項にかけた」ということです。

$$a(\square+\triangle) = ax + ay$$

カッコの外から a を分配法則して、$ax + ay$ になるように□と△を決めるのが因数分解です。
このように因数分解は展開の逆なので、常に展開を頭に思い浮かべて考えましょう。

例　　$2x^2-18x$ を因数分解する
$2x^2 \rightarrow 2x\times x$,　$-18x \rightarrow 2x\times(-9)$のように　両方の項にそれぞれ $2x$ がかけられている。そこから、$2x(\triangle+\square)$とすると　△に x, □に-9 が当てはまる。
よって　$2x^2-18x=2x(x-9)$となる

このような因数分解を「共通因数をくくりだす」といいます。

これからが本格的な因数分解です

展開　　(ウ) $(x+a)(x+b)= x^2+ax+bx+ab$
因数分解 (エ) $x^2+ax+bx+ab= (x+a)(x+b)$

(ウ)の展開は下のように x と a をそれぞれ後ろのカッコの中に分配法則でかけていきます。

$$(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab$$

(エ)の因数分解を考えるときはまず $x^2+ax+bx+ab$ の x^2 に着目します
x^2 があるということから展開する前の形が $(x+□)(x+△)$ ということがわかります。
次に ab に着目します。すると□と△の積が ab になることがわかります。
そこで(x+□)(x+△)で□に a，△に b を入れると(x+a)(x+b)となります。

a と b の代わりに数字の入った因数分解を考えます。

展開　　(オ) $(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$
因数分解 (カ) $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$

(オ)の展開では $3\times5=15$、$3x+5x=8x$ となります。
(カ)は展開の逆なので、**積が 15,和が 8** となる 2 数を探して因数分解とします。2 数を探すときにまず積から考えます。正の数で積が 15 になるの組み合わせは 1×15，3×5 です。このうち和が 8 になるのは 3 と 5 です。

例　$x^2+10x+24$ を因数分解する

$x^2+10x+24=(x+□)(x+△)$

とすると□と△にはかけて 24、たして 10 になる数が入る。 かけて 24 になるのは 1×24，2×12，3×8，4×6　このうちたして 10 になるのは 4+6　よって　$x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$　となる

【例題】 因数分解しなさい
① x^2+5x+6 ② $x^2+8x+12$ ③ x^2+4x+3

【答】 ① $(x+3)(x+2)$　② $(x+2)(x+6)$　③ $(x+1)(x+3)$

因数分解 2

$x^2-2x-15$ の因数分解

$x^2-2x-15 = (x + □)(x + △)$

□と△の積が定数項-15 です。積が負の数になるのは □と△のどちらかが負で、残りが正です。 よって積が-15 になる数は-1×15, -3×5, -5×3, -15×1　このなかで和が-2 となるのは -5 と 3 なので

$x^2-2x-15 = (x - 5)(x + 3)$ となります。

符号の間違いは多いのでしっかり確かめることを忘れずに!
積が-15 になる数は 4 組だけですが 大きな数になって組が増えると頭の中では数え切れなくなります。
その場合 -1×15, -3×5, -5×3, -15×1 のように書き出してみましょう。

【例題】 因数分解しなさい。

① $x^2-3x-28$　② $x^2+2x-48$　③ $x^2-5x-24$

【答】 ① $(x-7)(x+4)$　② $(x-6)(x+8)$　③ $(x-8)(x+3)$

$x^2-8x+12$ の因数分解

$x^2-8x+12 = (x + □)(x + △)$

定数項は 12 で正の数ですが、x の係数が負の数なので
□、△ともに,負の数になります。
よって積が 12 になる数は-1×(-12), -2×(-6), -3×(-4)　です。
和が-8 になるのは-2 と-6 なので
$x^2-8x+12 = (x - 2)(x - 6)$ となります。

【例題】 因数分解しなさい。

① x^2-3x+2　② $x^2-10x+16$　③ $x^2-12x+27$

【答】 ① $(x-2)(x-1)$　② $(x-2)(x-8)$　③ $(x-3)(x-9)$

2乗の因数分解

(ア)　$x^2-8x+16$

(イ)　x^2+6x+9

考え方はいままでとまったく同じです。

(ア)はかけて 16，たして-8 になる数の組み合わせを考えて

$x^2-8x+16 = (x-4)(x-4)$　となりますが

同じものの掛け算なので 2 乗にします。

$x^2-8x+16 = (x-4)^2$

(イ)も同じようにすると

$x^2+6x+9 = (x+3)^2$

【例題】 因数分解しなさい。

① $x^2-12x+36$　　② $x^2+10x+25$

【答】① $(x-6)^2$　② $(x+5)^2$

---

x^2-49　の因数分解

x^2 の項はありますが、x の項がない式です。

x の項がないのは x の係数が 0 と考えます。

つまり、積が-49 になり　和が 0 になる数の組をみつけます。

積が-49 になるのは-1×49、-7×7、-49×1 の 3 組です。

和が 0 になるのは-7 と 7 なので

$x^2-49 = (x-7)(x+7)$　となります。

【例題】 因数分解しなさい。

① x^2-36　② x^2-1　③ x^2-a^2

【答】① $(x+6)(x-6)$　② $(x+1)(x-1)$　③ $(x+a)(x-a)$

いろいろな因数分解

共通因数をくくり出した後、さらに因数分解する

(例) $2ax^2-18a$　これを因数分解。

$$2ax^2-18a=2a(x^2-9)=2a(x+3)(x-3)$$

例では、はじめに共通因数の 2a をくくりだして、さらに(　　)の中を因数分解しています。
注意するのは、**先に共通因数をくくりだすこと**、そして、共通の因数をすべてくくりだすこと。
例では a だけでなく 2a をくくりださないとそのあとがうまくいきません。

【例題】因数分解しなさい。
①　kx^2-ky^2　　②　$3cx^2-3cx-18c$

【答】① $k(x+y)(x-y)$　② $3c(x+2)(x-3)$

おきかえを使った因数分解

式の中の共通な部分を他の文字におきかえて因数分解する。

例　$(x+y)^2+3(x+y)-10$　これを因数分解。
この式では　$(x+y)$　を他の文字に置き換える。

$(x+y)=A$　とおく
$$(x+y)^2+3(x+y)-10=A^2+3A-10=(A+5)(A-2)=(x+y+5)(x+y-2)$$
置き換えた文字は最後にもとにもどします。

【例題】因数分解しなさい。

① $a(x+y)-5(x+y)$

② $(a+2)^2-2(a+2)-63$

③ $(a+b)^2-(x+y)^2$

【答】① $(x+y)(a-5)$ ② $(a-7)(a+9)$ ③ $(a+b+x+y)(a+b-x-y)$

素数・素因数分解

素数とは

約数が1と自分自身の2つしかない自然数

例

6 の約数は 1,2,3,6 と 4 つありますから 6 は素数ではありません。

5 の約数は 1,5 の2つだけなので 5 は素数です。

ひとけたの素数は 2, 3, 5, 7 となります。

1 は素数ではないので注意しましょう。

【例題】

10 から 20 までの間にある素数をすべて求めなさい。

【答】 11, 13, 17, 19

素因数分解とは

自然数を素数の積の形で表すこと

例

6 は 2×3 と計算できるので **$6=2\times3$** となります。

18 は 2×9 と計算できるけれど 9 は素数ではないのでさらに

$2\times3\times3$ と分解でるので、
　このように累乗をつかって表します。 $18=2\times3^2$

また、大きい数を素因数分解するときは小さな素数から順に割っていきます。

2で割る。	割れるところまで2で割っていく	次に3で割る	次に5で割る
2) 120	2) 120	2) 120	2) 120
60	2) 60	2) 60	2) 60
	2) 30	2) 30	2) 30
	15	3) 15	3) 15
		5	5) 5
			1

このように最後が1になるまでつづけます。

$$120 = 2\times2\times2\times3\times5$$
$$= 2^3\times3\times5$$

【例題】素因数分解しなさい
(1) 16　　(2) 72　　(3) 42

【答】(1) $16=2^4$　(2) $72=2^3\times3^2$　(3) $42=2\times3\times7$

②平方根

平方根

平方根
平方根とは2乗の逆のことです。

2乗したときにAになる数をAの平方根といいます。
0を2乗しても0なので0の平方根は0だけです。
1の2乗は1、-1の2乗も1なので1の平方根は±1となりま

す。
0 以外の数の平方根は必ず正と負の2つです。

文字式で考えると、x の2乗は x^2 なので x^2 の平方根は±x です。
また、2乗したときに負の数になることはありえないので、負の数の平方根は存在しません。

【例題】次の数の平方根を求めよ。
(1) x^4　　(2) a^2x^2

【答】(1) $\pm x^2$　(2) $\pm ax$

平方根を表す記号
平方根を表す記号を根号(ルート)といいます。√です。

$\sqrt{4}$ は 4 の平方根のうち正の数を表します。つまり $\sqrt{4} = 2$ です。
負の数を表したいときはマイナスをつけます。　$-\sqrt{4} = -2$

この根号を使うと平方根が整数にならないような場合でも平方根を表すことができます。
(例)　2 の平方根は $\pm\sqrt{2}$　15 の平方根は $\pm\sqrt{15}$ x の平方根は $\pm\sqrt{x}$

負の数には平方根が存在しないので根号の中は必ず正の数です。
上の例で言うと x は必ず正でなければなりません。

【例題】次の数の平方根を求めよ。
ただし、存在しないときは「なし」と書くこと。
(1) 3　　(2) 64　　(3) -16

【答】 (1) $\pm\sqrt{3}$ (2) ± 8　　(3) なし

平方根の計算1

1. 掛け算・割り算

平方根の計算ポイント①
掛け算、割り算はルートの中どうし計算できる。

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$　$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

【例】

$\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7} = \sqrt{35}$　$\sqrt{21} \div \sqrt{3} = \sqrt{21 \div 3} = \sqrt{7}$

平方根の計算 2

平方根とは 2 乗の逆のことなので
$(\sqrt{a})^2 = a$　$\sqrt{a^2} = a$
これが平方根の基本です。(ただし、$a > 0$)

1.ルートの中を簡単にする

例

$\sqrt{12}$ について

12 を素因数分解すると　$12 = 2 \times 2 \times 3$　となります。

つまり　$\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3}$

$\sqrt{2 \times 2} = \sqrt{2}$　なので

$\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

となります。

このようにしてルートの中は常にできるだけ簡単にしておきます。

例

$\sqrt{8}=\sqrt{2\times2\times2}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{63}=\sqrt{3\times3\times7}=7\sqrt{7}$

2. 足し算・引き算

平方根の足し算、引き算はルートの中がまったくおなじときしか計算できませんが
一見計算できないと思っても、ルートの中を簡単にすると計算できる場合があります。

例

$\sqrt{63}+\sqrt{28}=3\sqrt{7}+2\sqrt{7}=5\sqrt{7}$

このため常に、**ルートの中はできるだけ簡単に**しておく必要があります。

3. 分母の有理化

$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ このように分数の分母に平方根がある場合、分母の平方根をなくす必要があります。

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$という性質を利用して、分母にある平方根と**同じ平方根を分母、分子に**かけます。

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

分母が$2\sqrt{5}$なら、$\sqrt{5}$だけかけます。

$$\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{35}}{10}$$

ルートの中は、有理化する前に簡単にしておくほうが計算間違いが少なくなります。

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

例題　分母を有理化せよ。

① $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$　　② $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

【答】① $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$　　② $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

③2次方程式

2 次方程式(平方根)

2 次方程式

x の 2 乗の項を含む方程式を 2 次方程式といいます。
$ax^2+bx+c=0$　が一般の形です。

2 次方程式の解き方は **2 つ**
平方根の考え方を使う解き方と**因数分解**を使った解き方です。

1. 平方根の考え方を用いた解き方

(例 1)
$A^2 = 3$
$A = \pm\sqrt{3}$ →A の 2 乗が 3 なので、A は 3 の平方根です。

(例 2)
$(x+5)^2 = 3$ →(　)の**中身を一かたまりと考え**、(例 1)と同様にして、
$x+5 = \pm\sqrt{3}$ →(x+5)の 2 乗が 3 なので、(x+5)は 3 の平方根。
$x = -5\pm\sqrt{3}$ →　+5 を移項。

【例題】2 次方程式を解け。
①　$x^2 = 16$ ②　$(x+2)^2 = 5$ ③　$(x-6)^2 = 10$

【答】① $x = \pm4$　② $x= -2\pm\sqrt{5}$　③ $x= 6\pm\sqrt{10}$

2 次方程式(因数分解)

2. 因数分解を用いた解き方

A×B = 0　となるのはどんな場合でしょうか。
2 数の積が 0 になるのはどちらかが 0 の場合です。つまり
A×B=0　が成り立つのは　A=0　のときと B=0　のときです
この考え方をつかって 2 次方程式を解きます。

(例 1)
3x=0 →3 と x の積が 0 なので x=0 です。(1 次方程式)

(例 2)
x(x-4)=0 →x と(x-4)の積が 0 なので、x=0 または、x-4=0 です。
つまり x=0, x=4 になります。

(例 3)
(x+3)(x-2)= 0 →(x+3)と(x-2)の積が 0 なので、(x+3)=0、または
(x-2)=0、つまり x=-3, x=2 です。

【例題】 x の値を求めよ。
①(x+5)(x-1)=0 ②(x+7)(x+9)=0 ③ x(x-6)=0

【答】① x=-5、x= 1 ② x=-7、 x=-9 ③ x=0, x=6

解の公式

2 次方程式の解の公式

$ax^2+bx+c=0$ の解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例

$3x^2+5x+1=0$を解く。

$a=3$, $b=5$, $c=1$ を解の公式に代入して計算する。

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times1}}{2\times3}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

問題　解の公式を使って次の2次方程式を解け

$2x^2+3x-1=0$　$5x^2-9x+3=0$　$3x^2-2x-2=0$

【答】① $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$　② $x=\frac{9\pm\sqrt{21}}{10}$　③ $x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

④関数

2 乗に比例する関数 1

2 乗に比例する関数

$y=ax^2$　(a は比例定数)

y の値を求める。

関数は x の値に対応して、y の値が1つ定まるので、関数の式が分かっている場合、**x に値を代入することで y の値を求めることができる。**

(例)　$y=3x^2$ で　$x=-2$　のときの y の値を求める。

式に x の値を代入すると

$y = 3\times(-2)^2$

$= 12$

式を求める。

yがxの2乗に比例することが分かっている場合、
$y=ax^2$ に **xとyの値を代入して比例定数を求める**ことがでる。

(例) yがxの2乗に比例し、$x=-2$ のとき $y=20$ でした。このときのyをxの式で表す。
$y=ax^2$ に $x=-2$, $y=20$ を代入すると
$20=a\times(-2)^2$
$a=5$ よって式は $y=5x^2$

【例題】
yがxの2乗に比例し、$x=-2$のとき$y=24$でした。
(1) yをxの式で表せ。
(2) $x=-3$のときのyの値を求めよ。

【答】(1) $y=6x^2$ (2) $y=54$

2乗に比例する関数2

グラフの描き方

2乗に比例する関数のグラフは直線ではないので
できるだけたくさんの点をとってグラフをかきましょう。

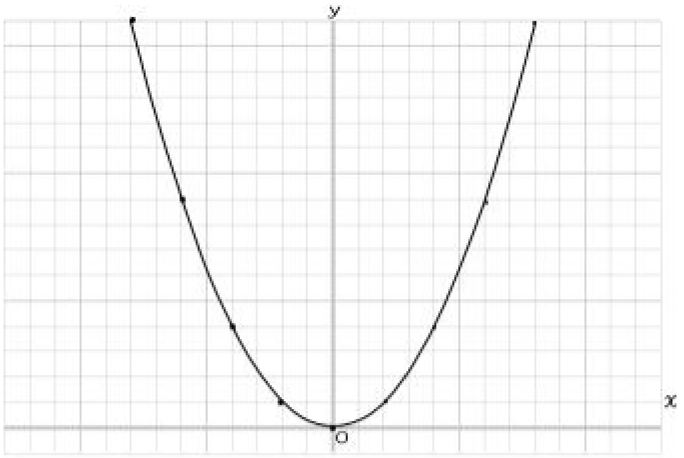
(例) $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフの書き方

xの値を式に代入して下の表を埋めます。→ クリック

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

表をもとにしてグラフ用紙に点をとります。→ クリック

点を結んでグラフにしますが、直線ではないので
定規を使わずなめらかな曲線にします。→ クリック



この曲線を放物線といいます。

$y=ax^2$ のグラフの特徴

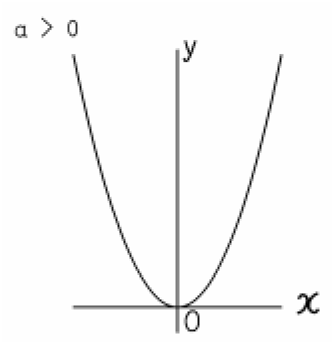
・必ず原点を通り、その原点が頂点である。

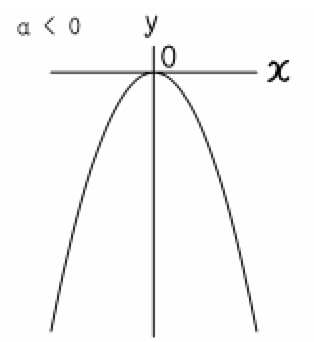
・y軸について対称である。

・$a > 0$ のときは上に開き、$a < 0$ のときは下に開く。

・a の絶対値が小さいほどグラフの開きが大きい。

・$y=ax^2$ のグラフと $y=-ax^2$ のグラフは x 軸について対象である。





2 乗に比例する関数 3

変域

変 域 とは･･･グラフの 範 囲 のことです。
グラフを描 いたときの横 の範 囲 が x の変 域 、縦 の範 囲 が y の変 域 になります。

図1

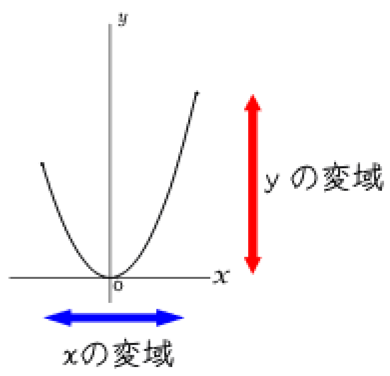
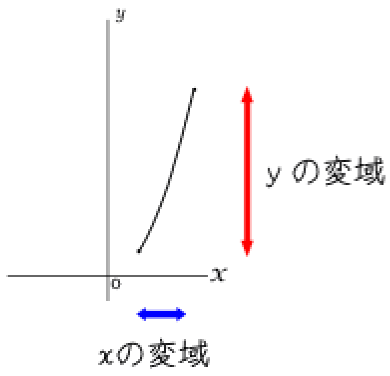


図2



上 記 図 2 のような場 合 や、1 次 関 数 ではグラフの両 端 の点 を考 えるだけでしたが、 図 1 のように放 物 線 のグラフが原 点 を含 むような場 合 は y の最 小 値 が 0 になるので注 意 が必 要 です。

※ 変 域 を考 える場 合 には**グラフを描 く**か、少 なくとも頭 の中 に思 い浮 かべるようにしましょう。 基 本 的 な問 題 よりもむしろ応 用 発 展 問 題 を解 く場 合 に差 がつきます。

【例題】$y = 3x^2$ について、xの変域が次のそれぞれの場合のyの変域を求めよ。

(1)$-5 \leqq x \leqq -1$　　(2)$-2 \leqq x \leqq 3$　　(3)$1 \leqq x \leqq 4$

【答 】(1)3≦ y≦ 75　 (2)0≦ y≦ 27　 (3)3≦ y≦ 48

変化の割合

$$変化の割合=\frac{y の増加量}{x の増加量}$$

比例反比例、1 次関数、そして 2 乗に比例する関数、すべて変化の割合は同じ式を用います。 ただし、1 次関数では変化の割合は一定ですが、2 乗に比例する関数では変化の割合は一定になりません。

(例) $y=3x^2$ について

① x が-3 から 1 まで変化するときの変化の割合

x=-3 のとき y = 27, x=1 のとき y = 3

x が-3 から 1 まで変化する …x の増加量 4

y が 27 から 3 まで変化する …y の増加量 -24

変化の割合は −24／4=−6

② x が 1 から 5 まで変化するときの変化の割合

x=1 のとき y = 3, x=5 のとき y = 75

x が 1 から 5 まで変化する …x の増加量 4

y が 3 から 75 まで変化する …y の増加量 72

変化の割合は 72／4=18

【例題】

(1) $y=2x^2$ についてxの値が次のように変化するときの変化の割合をそれぞれ求めよ。

①−3から1　　② −2から4

(2) $y=\frac{1}{4}x^2$ についてxの値が次のように変化するときの変化の割合をそれぞれ求めよ。

① −10から2　　② −2から6

【答】(1)① -4 ② 4 (2)① -2 ②1